Dénombrement

Dans ce chapitre, les lettres E, F, G, A, B, C,… désignent des ensembles, et les lettres n, m, p, a, b, c,… des entiers.

Préliminaires :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \times n!, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Lorsque $E = \varnothing$, il y a une seule application de E vers F. Cette application est injective (et surjective si et seulement si $F = \varnothing$)

I Ensembles finis et cardinaux : les bases

A) Supposé connu

- La notion d'ensemble fini ou infini.
- Ce qu'est le cardinal d'un ensemble fini ($\text{card}(\varnothing) = 0$)
- Pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, $\text{card}([\![p, n]\!]) = n - p + 1$

Admis :
Si E est fini, et si $F \subset E$, alors F est fini, et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$
Si E et F sont disjoints et finis, alors $F \cup E$ est fini et :
$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$

B) Conséquences

Si $E_1, E_2, ...E_n$ sont finis et disjoints deux à deux, alors $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$ est un ensemble fini de cardinal $\sum_{k=1}^{n} \text{card}(E_k)$ (Cet ensemble est aussi noté $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$)

Si E et F sont finis, alors $E \cup F$ est fini et :
$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$

Démonstration :
$E \cup F = E \cup (F \setminus E)$. Or, $F \setminus E \subset F$, donc $F \setminus E$ est fini.
Les ensembles E et $F \setminus E$ sont disjoints.
Donc $E \cup (F \setminus E)$ est fini et $\text{card}(E \cup (F \setminus E)) = \text{card}(E) + \text{card}(F \setminus E)$
Donc $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F \setminus E)$
Par ailleurs, $(F \setminus E) \cup (F \cap E) = F$, et $F \setminus E$ et $F \cap E$ sont disjoints et finis.
Donc $\text{card}(F \setminus E) + \text{card}(F \cap E) = \text{card}(F)$
Soit : $\text{card}(F \setminus E) = \text{card}(F) - \text{card}(F \cap E)$
Donc $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$

C) Résultats liant applications entre ensembles finis et comparaison de leurs cardinaux (admis)

(1) Si E est fini, on a l'équivalence : Il existe une injection de E dans F $\Leftrightarrow$ F est infini ou $\text{card}(F) \geq \text{card}(E)$

(2) Si F est fini, on a l'équivalence : Il existe une surjection de E dans F $\Leftrightarrow$ F est fini et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$

(3) Si F est fini, on a l'équivalence : Il existe une bijection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est fini et $\text{card}(F) = \text{card}(E)$

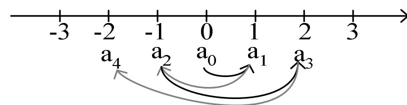
Autre résultat admis :
Soient E, F de même cardinal et finis.
Soit $f : E \to F$.
On a les équivalences :
f est injective $\Leftrightarrow$ f est bijective
f est surjective $\Leftrightarrow$ f est bijective.

D) Notion d'ensemble dénombrable

Définition :
Soit E un ensemble. E est dénombrable lorsque E est fini ou lorsque E est en bijection avec $\mathbb{N}$ (E est alors infini dénombrable).

Exemples :

- $\mathbb{N}$ est dénombrable
- L'ensemble des nombres pairs P est dénombrable. En effet :
  $\begin{matrix} \mathbb{N} \to P \\ k \mapsto 2k \end{matrix}$ est bijective.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.



- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable :

	0	1	2	3	4
0	^{0}(0,0)	^{2}(0,1)	^{5}(0,2)	(0,3)	(0,4)
1	^{1}(1,0)	^{4}(1,1)	^{8}(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	^{3}(2,0)	^{7}(2,1)			
3	^{6}(3,0)	(3,1)			
4	(4,0)	(4,1)			

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- L'ensemble E des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable ($u_k = 100100011...$)

Démonstration :
Supposons qu'il le soit.
On peut alors écrire les éléments de E.
$f(0) = 0^{\text{ème}} : 10011001001...11$
$f(1) = 1^{\text{er}} : 100100011101...01$
$\vdots$

Pour chaque $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on note $a_{n,p}$ le terme d'indice p du n-ième élément de E.
On a alors un tableau :

$$\begin{matrix} f(0) & \boxed{a_{00}} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} & \cdots \\ f(1) & a_{10} & \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\ f(2) & a_{20} & a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \end{matrix}$$

Soit u la suite de E définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_{kk} = 1 \\ 1 \text{ si } a_{kk} = 0 \end{cases}$$

Alors u n'est pas dans le tableau. $\text{non}(\exists n \in \mathbb{N}, u = f(n))$

En effet, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u = f(n)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = a_{nk}$, et en particulier $u_n = a_{nn}$, ce qui est impossible.

Théorème (admis) :
Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable

II Dénombrement classique

Dans ce paragraphe, tous les ensembles considérés sont finis.

A) $\text{card}(E \times F)$

Proposition :
Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$, alors $\text{card}(E \times F) = n \times p$.

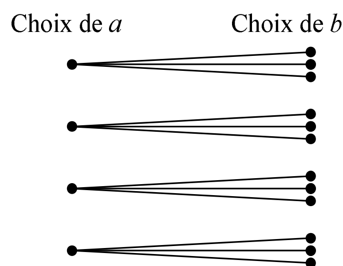
Démonstration :

- informelle :

$\text{card}(E \times F) =$ nombre d'éléments de $E \times F$.

Nombre d'éléments = nombre de façons de « faire » un élément. Pour faire un élément (a,b) de $E \times F$, on doit choisir a dans n éléments, et b dans p éléments.

Visualisation :



- formelle :

$E \times F = \bigcup_{a \in E} \{a\} \times F$

Pour chaque $a \in E$, $\begin{array}{l} F \to \{a\} \times F \\ y \mapsto (a,y) \end{array}$ est bijective.

Donc $\text{card}(\{a\} \times F) = \text{card}(F)$. Les $\{a\} \times F$ pour $a \in E$ sont disjoints deux à deux.

Donc $\text{card}(E \times F) = \sum_{a \in E} \text{card}(\{a\} \times F) = \sum_{a \in E} \text{card}(F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

Conséquence :

$\text{card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times ... \times \text{card}(E_n)$

$\text{card}(E^m) = (\text{card}(E))^m$

$\text{card}(E^m)$ est la nombre de m-uplets $(a_1, a_2, ... a_n)$ d'éléments de E.

B) $\text{card}(\mathcal{F}(E,F))$.

Proposition :
$\text{card}(\mathcal{F}(E,F)) = (\text{card}(F))^{\text{card}(E)}$

Démonstration :

$E = \{a_1, a_2, ... a_n\}$ où les a_i sont distincts deux à deux.

$F = \{b_1, b_2, ... b_p\}$ où les b_j sont distinct deux à deux.

Pour fabriquer une application de E dans F :

1) image de a_1 : p possibilités.
2) image de a_2 : p possibilités.
$\dots n$) image de a_n : p possibilités.
Donc p^n possibilités en tout.

Remarque : en particulier, $\mathrm{card}(\mathcal{F}([\![1,m]\!],\mathrm{E})) = (\mathrm{card(E)})^m$

C) card($P(E)$)

Proposition :
$\mathrm{card}(P(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)}$

Démonstration :
On note $n = \mathrm{card}(E)$, $E = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$
Se donner une partie A de E, c'est se donner la liste $(r_1, r_2, \dots r_n)$ de 0 et de 1 définie par : $\forall k \in [\![1,n]\!], r_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_k \notin A \\ 1 \text{ si } a_k \in A \end{cases}$
Or, il y a 2^n telles listes (voir B))
Plus formellement :
L'application $\begin{array}{l} P(E) \to \{0,1\}^n \\ A \mapsto (x_1, x_2, \dots x_n) \end{array}$ définie par $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_k \notin A \\ 1 \text{ si } a_k \in A \end{cases}$
Est bijective.

D) Nombre d'injections de E vers F.

On note $p = \mathrm{card}(E)$, $n = \mathrm{card}(F)$
Le nombre d'injections de E vers F est $A_n^p = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \end{cases}$

En effet : (le cas où $p > n$ étant évident)
Si $p \leq n$.
Soit $p = 0$, et alors $A_n^p = 1$, ok (une seule injection d'un ensemble à 0 éléments vers un autre ensemble)
Si $1 \leq p \leq n$, notons alors $E = \{a_1, a_2, \dots a_p\}$.
Pour construire une injection de E vers F :
1) On choisit $f(a_1)$; n possibilités.
2) On choisit $f(a_2)$; $n-1$ possibilités.
$\dots p$) On choisit $f(a_p)$; $n-p+1$ possibilités.
On a donc $n(n-1)\dots(n-p+1)$ possibilités.
Remarque : A_n^p est aussi le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.

E) Nombre de permutations d'un ensemble fini

Définition :
Une permutation sur E est une bijection de E dans E.
L'ensemble des permutations sur E est noté $\mathfrak{S}(E)$.

Proposition :

Soit E de cardinal n. Alors le nombre de permutations sur E est $n!$.

En effet : comme E est fini, une application de E dans E est bijective si et seulement si elle est injective. Donc le nombre de permutations est A_n^n.

F) Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

Proposition :

Soit E de cardinal n, soit $p \in \mathbb{N}$.

Alors le nombre de parties de cardinal p de l'ensemble E est :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \end{cases}$$

Démonstration : (cas $p = 0$, $p > n$ évidents)

Cas où $1 \leq p \leq n$: comptons de deux manières différentes le nombre de p-listes d'éléments distincts de E.

1) Ce nombre est A_n^p

2) Pour construire une telle p-liste $(x_1, x_2, ... x_p)$, on choisit d'abord l'ensemble des p termes de la liste : $\binom{n}{p}$ possibilités. On doit ensuite les ranger : $p!$ possibilités. Ainsi, le nombre cherché est $\binom{n}{p} \times p!$

Donc $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

III Propriétés des $\binom{n}{p}$

(1) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

En effet, choisir p éléments parmi n revient à choisir les $n-p$ qu'on ne prend pas.

(2) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

Démonstration :

Si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$, $\binom{n-1}{p} = 0$, $\binom{n-1}{p-1} = 0$

Si $p = n$, $\binom{n}{p} = 1$, $\binom{n-1}{p} = 0$, $\binom{n-1}{p-1} = 1$

Sinon : Soit E de cardinal n. Comme $n > p$, $E \neq \varnothing$

Soit alors $a \in E$. On a :

$\binom{n}{p} = N_1 + N_1$, où N_1 est le nombre de parties à p éléments de E sans a, et N_2 le nombre de parties à p éléments de E avec a. Alors :

$N_1 = \binom{n-1}{p}$ (on choisit p éléments parmi $E \setminus \{a\}$)

$N_2 = \binom{n-1}{p-1}$ (on choisit a, il reste à choisir les $p-1$ autres éléments dans $E\setminus\{a\}$)
D'où le résultat.
Application :

Permet de remplir le tableau donnant les $\binom{n}{p}$:

$n\setminus p$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	1	1+1	1+0	0
3	1	1+2	2+1	1+0

(3) $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$

En effet, $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ correspond au cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments (nombre de parties à 0 éléments + nombre de parties à 1 élément +…)

Ou : $P(E) = \bigcup_{p=0}^{n} P_p(E)$, et les $P_p(E)$ sont disjoints deux à deux.

($P_k(E)$: ensemble des parties à k éléments de E)

Donc $\text{card}(P(E)) = \sum_{p=0}^{n}\text{card}(P_p(E))$, soit $2^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$

(4) $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}$

Démonstration (cas $p=0$, $p>n$ triviaux) :
Si $1 \le p \le n$:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

$$= \frac{n-p+1}{p}\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}\binom{n}{p-1}$$

Si $p = n+1$:

$$\binom{n}{n+1} = 0,\ \binom{n-1}{n} = 0,\ \frac{n-p+1}{p} = 0$$

Autre démonstration, combinatoire, pour $1 \le p \le n$:
Soit E de cardinal n. Comptons le nombre de couples (A, a) constitués :
- d'une partie A de E de cardinal p.
- d'un élément a de A.

Notons n ce nombre. On a :

$$N = \underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A} \times \underbrace{p}_{\text{choix de } a \text{ dans } A},\ \text{et } N = \underbrace{n}_{\text{choix de } a \text{ dans } E} \times \underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\text{choix de } A \text{ à } p \text{ éléments contenant } a}$$
, d'où la première égalité.

Mais aussi :

$$N = \underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A} \times \underbrace{p}_{\text{choix de } a \text{ dans } A},\ \text{et } N = \underbrace{\binom{n}{p-1}}_{\text{choix de } B \text{ à } p-1} \times \underbrace{n}_{\text{choix de } a \text{ dans } E\setminus B}$$
, d'où la deuxième égalité.

Exemple :
$E = \{1,2,3\}$, $p = 2$

$$N = \underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A} \times \underbrace{p}_{\text{choix de } a \text{ dans } A} : \begin{cases} A=\{1,2\} & \substack{a=1 \\ a=2} \\ A=\{2,3\} & \substack{a=2 \\ a=3} \\ A=\{1,3\} & \substack{a=3 \\ a=1} \end{cases} \qquad N = \underbrace{n}_{\text{choix de } a \text{ dans } E} \times \underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\text{choix de } A \text{ à } p \text{ éléments contenant } a} : \begin{cases} a=1 & \substack{A=\{1,2\} \\ A=\{1,3\}} \\ a=2 & \substack{A=\{2,3\} \\ A=\{2,1\}} \\ a=3 & \substack{A=\{3,2\} \\ A=\{3,1\}} \end{cases}$$

$$N = \underbrace{\binom{n}{p-1}}_{\text{choix de } B \text{ à } p-1} \times \underbrace{n}_{\text{choix de } a \text{ dans } E\setminus B} : \begin{cases} \{1\} & \substack{a=3 \\ a=2} \\ \{2\} & \substack{a=1 \\ a=3} \\ \{3\} & \substack{a=1 \\ a=2} \end{cases}$$

(5) La formule du binôme de Newton.

Théorème : Soient $a,b \in \mathbb{C}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p} a^p b^{n-p} \right)$$

Démonstration : par récurrence sur n, avec a, b fixés.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p} a^p b^{n-p} \right)}_{P(n)}$

* $P(0)$, $P(1)$ ok
* soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$. On a :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \underbrace{a^{p+1} b^{n-p}}_{p+1+n-p=n+1} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \underbrace{a^p b^{n-p+1}}_{p+n-p+1=n+1} = \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n}{q-1} a^q b^{n-q+1} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p+1}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}} a^{n+1} b^0 + \sum_{p=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right)}_{\binom{n+1}{p}} a^p b^{n-p+1} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}} a^0 b^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^p b^{n+1-p}$$

Ce qui achève la récurrence.

(6) Soit E de cardinal $n \geq 1$. Alors, il y a dans E autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Démonstrations :

* On doit ainsi montrer : $\underbrace{\sum_{\substack{p \in [\![0,n]\!] \\ \text{et } p \text{ pair}}} \binom{n}{p}}_{A} = \underbrace{\sum_{\substack{p \in [\![0,n]\!] \\ \text{et } p \text{ impair}}} \binom{n}{p}}_{B}$.

On a :

$$(1+(-1))^n = \begin{cases} 0 \\ \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p = A - B \end{cases}$$ Donc $A - B = 0$, soit $A = B$, d'où le résultat.

* On note A l'ensemble des parties de E de cardinal pair, B de ceux de cardinal impair. Soit alors $a \in E$. Soit f l'application définie par :

$$f : P(E) \to P(E)$$
$$X \mapsto \begin{cases} X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$$

Alors $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ (on dit que f est involutive / une involution)

Donc f est bijective (car inversible, d'inverse elle-même). Donc f, par restriction, réalise une bijection de A sur son image, qui est évidemment B.